

東京地学協会 伊能忠敬没二百年記念講演会

我が国における
子午線弧長の計算について

国土地理院 地理地殻活動研究センター

研究管理課長 河瀬 和重

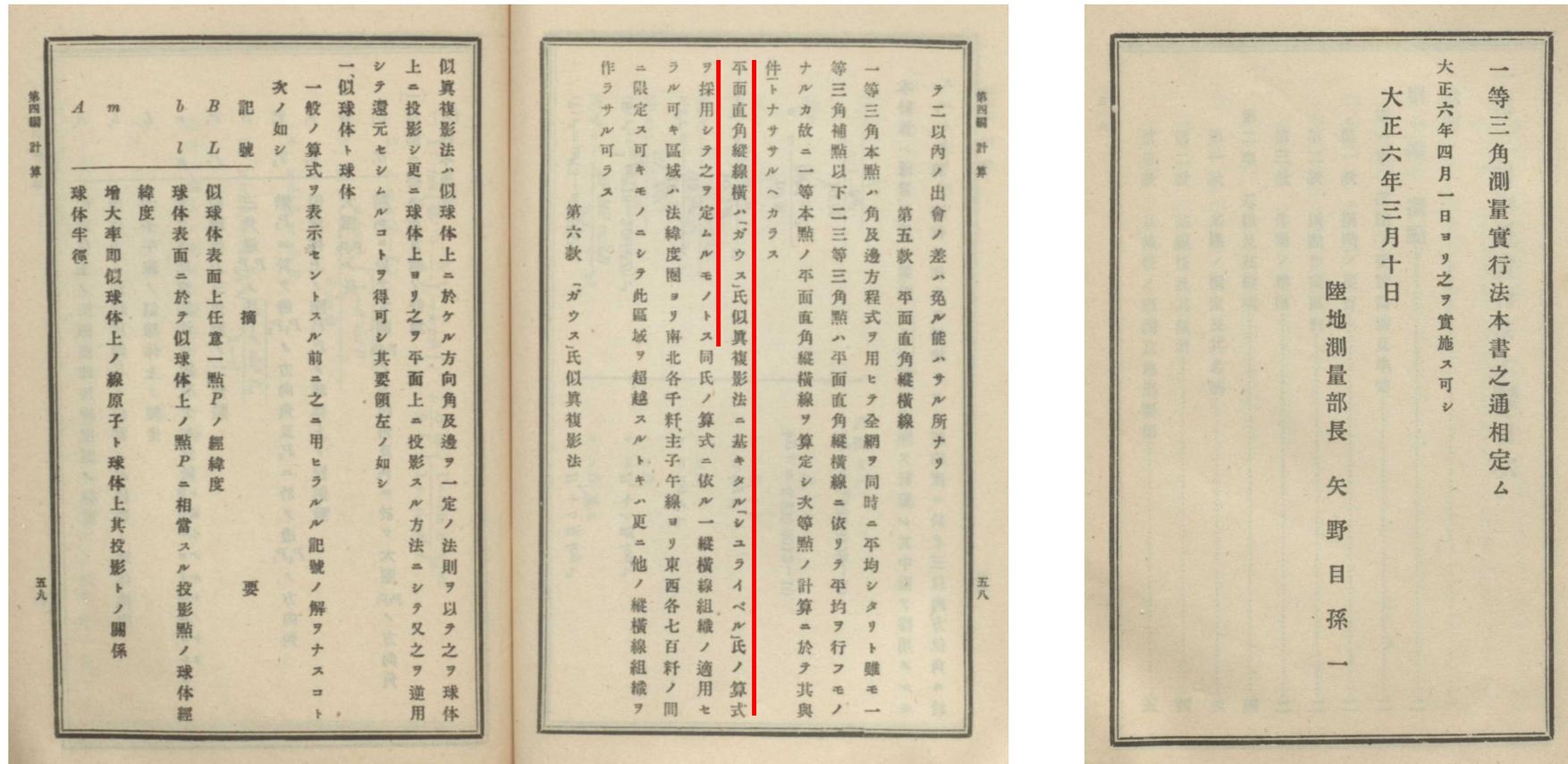
平成27年11月28日 @弘済会館

- 複数地点の子午線弧長測量による地球楕円体パラメータの決定
 - メートル法制定のための測量以後、フランス度量衡委員会, Everest, Bessel, Clarke, Helmert, Hayford などが、それぞれの地球楕円体パラメータを提唱
 - 国際地球楕円体 (1924), Красовский (1942) 辺りから子午線弧長測量に重力測定の結果を織り交ぜる方法へと変遷
 - 測地基準系1967 (GRS67) 以降では、子午線弧長測量に代わり人工衛星高度計、レーザー測距による人工衛星軌道解析、人工衛星ドップラー測位などによる成果を採用

- Gauß-Krüger図法
 - 中央子午線の子午線弧長を等長投影する条件付の正角図法
 - 国土地理院発行の地形図・地勢図、公共測量、地籍図等に広く採用
 - 座標換算式の導出に際し、精密な子午線弧長計算式が必要
- 【参考】Gauß等角二重投影法 (Gauß-Schreiber図法)
 - 明治17年、大三角測量事務が内務省から参謀本部に移管されるに際し設定以来、陸地測量部において終戦直後まで採用 (所謂『旧座標系』)
 - 回転楕円体面上における一等三角測量の測定値を平面上に化成計算
 - 投影の方法論に子午線弧長と直接の関係はない

子午線弧長計算式の今日的使途 (2)

【参考】陸地測量部におけるGauß等角二重投影法の規定



三五會々報第貳號

○三五會記事

本會ニ於テ常用表編輯ニ付會長ヨリ左ノ通り部署ヲ定メラレタリ
常用表編輯部署表

- 一 測量上必要ナル數學公式挿入法公式ヲ含ム 中嶼 權 梅津武雄
- 一 最小方數法公式 山田竹彦ノ三君
- 一 地球ノ大サ ベツセル氏算定 中嶼 權君
- 一 子午線上ノ曲率半徑橫曲率半徑中等曲率半徑 中嶼 權 中村文吉ノ二君
- 一 添加表 山田竹彦 余語久胤ノ二君
- 一 子午線弧長並面積 梅津武雄 中村榮藏ノ二君
- 一 經緯距表 梅津武雄君
- 一 地球体ノ坐標關係式 山田竹彦君
- 一 一等經緯度計算表 川北朝鄰君
- 一 二等經緯度計算表 中村榮藏君
- 一 三等經緯度計算表 松尾義男君

三五會報 第貳號

(9)

- $\log R - \log S, \log s - \log S (20^\circ - 50^\circ)$ 余語久胤君
- 一 似球体上ノ力向ヲ球面上ノモノニ化スル表 全
- 一 球過量計算表 木村卯太郎君
- 一 水準差視準差ノ方向ニ關スル式及表ノ簡單ナルモノ 山本菊次郎君
- 一 歸心化數計算法公式 山本菊次郎君
- 一 羅針偏差ノ値 中嶼 權君
- 一 折光係數Kノ値及其公式 全
- 以上

三五會報 第貳號

(10)

○彙報
陸地測量手山岡勝太郎氏ハ藥石効ナク五月十一日病死セラレタリ厚誼會ヨリハ規定ニ依テ香華料金五拾圓ヲ送ラレタリ
罹災狀況報告書
去月廿九日測地内地形偵察ノ爲メ約十日間ノ豫定ヲ以テ別紙ノ通り官用物品ノ保管ヲ富山縣東礪波郡平村大字下梨村水上重一ニ托シテ出發本月八日飛彈國大野郡鳩谷ヨリ下梨ニ向テ歸宿ノ途次午後一時頃富山縣東礪波郡上平村大字細島

- 明治後期の常用表編集の内容目録
(陸地測量部内機関誌)
- Jordan et al., *Handbuch der Vermessungskunde* (測地学便覽)を参照しているものと推察

- Euler (1755)

- 第三離心率の自乗 $e''^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ で表示した計算式

- Delambre (1799)

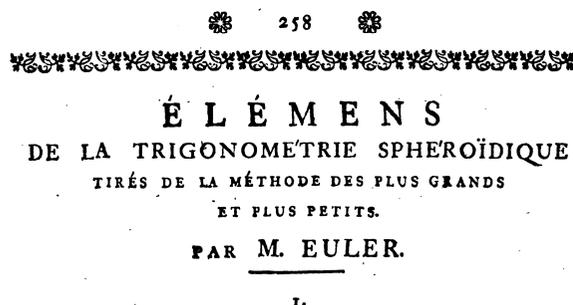
- 第一離心率の自乗 $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ で表示した二項展開項の項別積分による

- Jordan et al., *Handbuch der Vermessungskunde* にも記載あり

- 明治時代(おそらく)から2010年頃まで永らく国土地理院でも採用

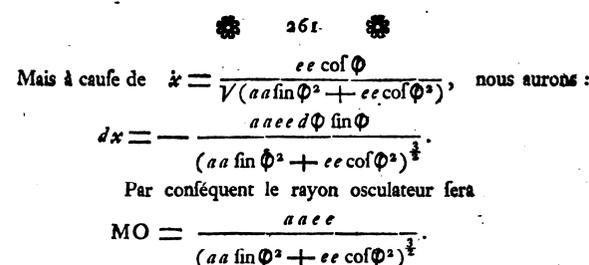
- 理科年表(地学部)にも1986年版から2009年版まで掲載

• Euler (1755) の該当箇所



1. **A**yant établi les Elémens de la Trigonométrie Sphérique sur le principe des plus grands & plus petits, mon but principal étoit de fixer un tel principe général, duquel on pût tirer la résolution des triangles formés non seulement sur une surface sphérique, mais en général sur une surface quelconque. Puisque les côtés d'un triangle sphérique sont des arcs de grands cercles, qui étant les lignes les plus courtes, qu'on puisse tirer sur la surface d'une sphère d'un point à un autre; c'est sur le même pied que j'envisage les côtés d'un triangle décrit sur une surface quelconque, de sorte qu'ils soient les chemins les plus courts, qui conduisent d'un angle à un autre sur cette surface. Ainsi concevant trois points sur une surface quelconque, qu'on tire de chacun aux autres les lignes les plus courtes, & le triangle sera formé, dont il s'agit d'enseigner la résolution.

2. Or je me borne ici aux surfaces sphéroïdiques, qui sont formées par la révolution d'une ellipse autour d'un de ses axes, & je considérerai en particulier les triangles formés sur la surface de la terre par des côtés, qui sont les plus courts entre leurs termes. Car, soit qu'on forme les côtés par des cordes tendus d'un point à l'autre, ou qu'on les tire en suivant la direction des rayons de lumière, en sorte que le



Donc, si nous prenons sur le même méridien un point infiniment proche m , dont la latitude soit $\Phi + d\Phi$, l'élément Mm sera un arc de cercle décrit du rayon MO , dont la longueur est

$$Mm = \frac{aaee d\Phi}{(aa \sin \Phi^2 + ee \cos \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

6. L'intégrale de cette formule donnera la longueur de l'arc elliptique EM , & pour en trouver la valeur approchée on n'a qu'à mettre $\sin \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi$ & $\cos \Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi$, pour

avoir $Mm = \frac{aaee d\Phi}{[\frac{1}{2}(aa+ee) + \frac{1}{2}(ee-aa)\cos 2\Phi]^{\frac{3}{2}}}$

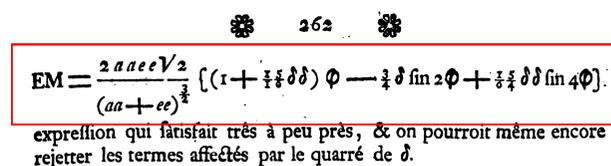
Car, puisque $ee - aa$ est extrêmement petit par rapport à $aa + ee$

en posant $\frac{ee - aa}{ee + aa} = \delta$, notre formule se change en

$$Mm = \frac{2aaee d\Phi \sqrt{2}}{(aa + ee)^{\frac{3}{2}}} (1 + \delta \cos 2\Phi)^{-\frac{3}{2}}$$

dont l'intégrale à cause de

$$(1 + \delta \cos 2\Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\delta\delta - \frac{3}{2}\delta\cos 2\Phi + \frac{3}{2}\delta\delta\cos 4\Phi, \text{ sera } EM$$



7. On peut aussi se servir de la formule différentielle pour déterminer la grandeur de chaque degré du méridien: on n'a qu'à donner à $d\Phi$ la valeur d'un degré, ou la 180^{me} partie de 3,14159265, qui est la longueur de l'arc de 180° le rayon étant posé = 1. On mettra donc $d\Phi = 0,017453292$, & Φ marquera la latitude au milieu de ce degré. Alors la grandeur de ce degré

$$\text{sera} = \frac{2aaee d\Phi \sqrt{2}}{(aa + ee)^{\frac{3}{2}}} (1 - \frac{3}{2}\delta \cos 2\Phi)$$

en négligeant les carrés de δ , & cette formule suffit pour déterminer à chaque élévation du pôle la grandeur d'un degré du Méridien. De là on pourra donc aussi réciproquement déterminer la grandeur des deux demi-diamètres de la Terre par la mesure actuelle de quelques degrés, en supposant que la figure de la Terre soit un sphéroïde elliptique. Deux degrés mesurés seroient suffisans pour cet effet, si la mesure étoit exacte au dernier point: mais, puisqu'une erreur d'une seconde en produit une de 16 toises environ dans la grandeur du degré; il sera bon d'y employer plusieurs degrés mesurés en avouant à chacun une petite erreur de 32 toises au moins, pour mettre ensuite d'accord les conclusions.

8. Posons pour abrégé $\frac{2aaee d\Phi \sqrt{2}}{(aa + ee)^{\frac{3}{2}}} = A$, puisque cette

quantité est la même pour tous les degrés; & les mesures d'un degré faites au Pérou, au Cap, en France & en Laponie nous fourniront les quatre équations suivantes.

A(1

子午線弧長の計算式の変遷 (3)

• Delambre (1799) の該当箇所

MÉTHODES ANALYTIQUES POUR LA DÉTERMINATION D'UN ARC DU MÉRIDIEN;

Par J. B. J. DELAMBRE,

Membre de l'Institut national et du Bureau des Longitudes, l'un des deux Astronomes chargés de la mesure de l'Arc compris entre Dunkerque et Barcelonne :

PRÉCÉDÉES

D'UN MÉMOIRE SUR LE MÊME SUJET,

Par A. M. LÉGENDRÉ, Membre de la Commission des Poids et Mesures de l'Institut national.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, près le Pont-Neuf.

AN VII.

72 DE LA DÉTERMINATION

$$\text{donc } L - l = \left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right) \sin 2L - \frac{1}{2} \left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right)^3 \sin 4L + \frac{1}{2} \left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right)^5 \sin 6L - \&c. \dots \dots \dots (22)$$

L - l est l'angle de la verticale avec le demi-diamètre. On en fait usage dans le calcul des parallaxes; il est le complément de l'angle que fait la courbe avec le rayon CA.

Les séries (20) et (22) donnent l'arc en parties du rayon. Pour l'avoir en secondes, on divisera chaque terme par sin 1".

Soit AA' l'élément de la courbe EA ou AA' = dA, A'u = dA sin L; mais

$$A'u = -dCF = -d \left(\frac{\cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{3/2}} \right) = - \left(\frac{d \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{3/2}} - \frac{1}{2} \cos L d(1-e^2 \sin^2 L)^{-3/2} \right) = \frac{(1-e^2) \sin L dL}{(1-e^2 \sin^2 L)^{5/2}};$$

donc $\frac{dA}{dL} = (1-e^2)(1-e^2 \sin^2 L)^{-5/2}$ = rayon de courbure du méridien. (23)

d'où $\frac{dA}{dL} \cdot \frac{(1-e^2 \sin^2 L)^{5/2}}{(1-e^2)} = 1$ = rayon de l'équateur. (24)

Cette formule suppose dA et dL exprimés en parties du rayon, Mais si dA est exprimé en mètres, toises ou autres mesures pareilles, le rayon de l'équateur sera exprimé en mesures semblables. Développons la formule (23), nous aurons

$$\begin{aligned} \left(\frac{dA}{dL}\right) &= 1 + \frac{5}{2} e^2 \sin^2 L + \frac{35}{8} e^4 \sin^4 L + \frac{63}{8} e^6 \sin^6 L + \&c. \\ &= 1 + \frac{5}{2} \frac{3}{1.2} e^2 + \frac{35}{8} \frac{4.3}{1.2.2^2} e^4 + \frac{63}{8} \frac{5.4}{1.2.2^2} e^6 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6.5.4}{1.2.3.2^2} e^8 + \frac{5.5.7.9}{2.4.6.8} \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4.2^2} e^{10} + \&c. \\ &= \left(\frac{3}{2} \frac{1}{2} e^2 + \frac{35}{2^4} \frac{4}{2^2} e^4 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6.5}{1.2.2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8.7}{1.2.3.2^2} e^8 + \&c.\right) \cos 2L \\ &+ \left(\frac{35}{2^4} \frac{1}{2^2} e^4 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6}{1.2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8.7}{1.2.2^2} e^8 + \&c.\right) \cos 4L \\ &- \left(\frac{35.7}{2.4.6} \frac{1}{2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8}{1.2^2} e^8 + \&c.\right) \cos 6L \\ &+ \left(\frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{1}{2^2} e^8 + \&c.\right) \cos 8L \\ &- \&c. \end{aligned}$$

La

D'UN ARC DU MÉRIDIEN. 73

La loi de cette série est évidente, on peut la continuer tant qu'on voudra. En intégrant, on aura

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-e^2} &= \left(1 + \frac{3}{2} \frac{3}{1.2} e^2 + \frac{35}{2^4} \frac{4}{2^2} e^4 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6.5.4}{1.2.3.2^2} e^6 + \frac{6.5.4}{2.4.6.8} \frac{35.7.9}{1.2.3.4.2^2} e^8 + \&c.\right) L \\ &- \frac{3}{2} \frac{1}{2} e^2 + \frac{35}{2^4} \frac{4}{2^2} e^4 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6.5}{1.2.2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8.7}{1.2.3.2^2} e^8 + \&c. \sin 2L \\ &+ \frac{35}{2^4} \frac{1}{2^2} e^4 + \frac{35.7}{2.4.6} \frac{6}{1.2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8.7}{1.2.2^2} e^8 + \&c. \sin 4L \\ &- \frac{35.7}{2.4.6} \frac{1}{2^2} e^6 + \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{8}{1.2^2} e^8 + \&c. \sin 6L \\ &+ \frac{35.7.9}{2.4.6.8} \frac{1}{2^2} e^8 + \&c. \sin 8L \dots \dots \dots (25) \\ &- \&c. \end{aligned}$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que A et L deviennent zéro en même temps. Cette série donnera la valeur d'un arc quelconque commençant à l'équateur, et terminé au point dont la latitude est L; elle se réduira au premier terme si L = 90°.

Soit pour abrégér

$$\frac{A}{1-e^2} = \alpha L - \beta \sin 2L + \gamma \sin 4L - \delta \sin 6L + \epsilon \sin 8L - \&c.$$

Soit un autre arc A' dont la latitude extrême soit L', on aura de même

$$\frac{A'}{1-e^2} = \alpha L' - \beta \sin 2L' + \gamma \sin 4L' - \delta \sin 6L' + \epsilon \sin 8L' - \&c.$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{A-A'}{1-e^2} &= \alpha (L-L') - \beta (\sin 2L - \sin 2L') + \gamma (\sin 4L - \sin 4L') \\ &\quad - \delta (\sin 6L - \sin 6L') + \epsilon \&c. \\ &= \alpha (L-L') - 2\beta \sin(L-L') \cos(L+L') + 2\gamma \sin 2(L-L') \cos 2(L+L') \\ &\quad - 2\delta \sin 3(L-L') \cos 3(L+L') + \epsilon \&c. \end{aligned}$$

Soit Q le quart du méridien $\frac{Q}{1-e^2} = \alpha \cdot 90^\circ$;

donc

$$\frac{Q}{A-A'} = \frac{\left(\frac{Q}{1-e^2}\right)}{\left(\frac{A-A'}{1-e^2}\right)} = \frac{\alpha \cdot 90^\circ}{\alpha (L-L') - 2\beta \sin(L-L') \cos(L+L') + 2\gamma \sin 2(L-L') \cos 2(L+L') - \epsilon \&c.}$$

K

- Bessel (1837)
 - 第三扁率 $n = \frac{a-b}{a+b}$ で表示した二重級数項の項別積分による
 - 有効展開項の大幅な縮減を達成
- Helmert (1880)
 - Bessel (1837) の改良版、展開係数の更なる簡潔化
- 河瀬 (2009)
 - Helmert (1880) の一般式化
 - 2011年版理科年表から代替掲載、作業規程の準則にも応用

• Bessel (1837) の該当箇所

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

No. 333.

Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationsphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht.

Von Herrn Geh. Rath und Ritter Bessel.

Die beobachteten Polhöhen von Punkten auf der Erde sind mit den Entfernungen der Parallelen derselben, in einem Zusammenhange, welcher durch die Kenntniss der Figur der Erde gegeben wird; wenn man die Gleichung ihrer Oberfläche kennt, so würde man die darin vorkommenden Constanten so bestimmen können, daß sie die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit den diese bestimmenden Polhöhen, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, in Uebereinstimmung brächte. Allein man kennt die Figur der Erde nicht; man weiß vielmehr, daß sie unregelmäßig ist. Jedoch ist ein elliptisches Rotationsphäroid vorhanden, von dessen Oberfläche sich die Oberfläche der Erde an keinem ihrer Punkte weit entfernt; ob diese Entfernung, an allen Punkten der Oberfläche, als eine, auch vergleichungsweise mit der Abplattung des Sphäroids kleine Größe angesehen werden kann, weiß man noch nicht, sondern wird es erst durch die Verbindung mehrerer Gradmessungen miteinander erfahren können. Indessen kann man darauf ausgehen, die Axen dieses Sphäroids so zu bestimmen, daß die vorhandenen Gradmessungen dadurch so gut als möglich dargestellt werden. Indem man die Abweichungen der Oberfläche der Erde von der Oberfläche dieses Sphäroids als gesetlos betrachtet, vereinigt sich ihr Einfluss auf die Polhöhen mit den Beobachtungsfehlern derselben, und man muß, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, dasjenige Sphäroid als das gesuchte betrachten, welches die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit Polhöhen in Uebereinstimmung bringt, deren Unterschiede von den beobachteten der Bedingung dieser Methode entsprechen.

Von diesem richtigen Gesichtspunkte ist zuerst *Walbeck* ausgegangen; allein er hat nur auf den südlichsten und den nördlichsten Punkt jeder Gradmessung Rücksicht genommen und die zwischen beiden liegenden, ebenfalls astronomisch bestimmten Punkte, nicht in seine Rechnung gezogen. Herr *Schmidt* hat die frühere Rechnung vervollständigt, indem er nicht nur allen beobachteten Polhöhen gleiches Recht einräumt, sondern auch Gradmessungen berücksichtigt hat, welche in der Zwischentzeit bekannt geworden waren. Ich komme auf denselben Gegenstand zurück, theils weil *Schmidt* mehrere Angaben an-

gewandt hat, welche mir unrichtig zu seyn scheinen; theils weil ich zu der Kenntniss von noch drei Gradmessungen gelangt bin. Die erste derselben verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Generals v. *Tenner* Exc. welcher eine eigene Unternehmung dieser Art ausgeführt, und an die nördlichere des Herrn Etatsraths v. *Struve* Exc. angeschlossen hat, so daß, durch beide zusammen, ein Bogen des Meridians von 8° 2' 29" gemessen worden ist. Die zweite verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Etatsraths *Schumacher*, dessen Messung 1° 31' 53" umfaßt. Die dritte, sich über 1° 30' 29" ausdehnende, ist von mir, gemeinschaftlich mit Herrn Major *Baeyer*, in der Gegend von Königsberg ausgeführt. Da hier zum ersten Male öffentlich davon die Rede ist, so bemerke ich darüber, daß sie zunächst den Zweck hatte, die im Süden und Westen von Europa vorgenommenen Gradmessungen mit denen in ummehrerer Verbindung zu setzen, welche im Norden und Osten angeführt worden sind und noch ausgeführt werden; damit man durch zusammenhängende, und die vorzüglichsten Sternwarten von Europa heftigende Dreiecksketten von Formentera bis nach Finland gelangen könne. Mit diesem näheren Zwecke wurde die Ausführung einer Gradmessung vereinigt, indem die Polhöhen unseres südlichsten und unseres nördlichsten Dreiecksendes mit der Polhöhe der Königsberger Sternwarte verglichen wurden.

1.

Ich werde zuerst die Data angeben, welche ich der folgenden Rechnung zum Grunde gelegt habe, so wie auch die Quellen, aus welchen ich sie gezogen habe.

1. Peruanische Gradmessung.

	Polhöhe.	Amplitude.	Entfern. der Parallelen.
Tarqui.....	3° 4' 32" 068		
Cotchesqui.....	+0 2 31,387	3° 7' 3" 455	176875,5

Diese Angaben beruhen auf den neuen Reductionen der Beobachtungen, welche *Delambre* und v. *Zach* vorgenommen haben. Der erstere giebt nämlich (Base du Syst. mtr. III. p. 133) die Polhöhen:

$$- 3^{\circ} 4' 31'' 9, \text{ und } + 0^{\circ} 2' 31'' 22.$$

147 B4.

357

Nr. 333.

338

müssen aber, nach *Katers* Prüfung der zur Messung angewandten Scale, um 0,00007 vergrößert werden, resp. um 3,66; 5,21; 6,84; 12,09.

Die in Toisen angegebenen Entfernungen stimmen mit den so vergrößerten überein.

6. Hannoverische Gradmessung.

Güttingen.....	51° 31' 47" 85		
Altona.....	53 32 45,27	2° 0' 57" 42	115163,725

Aus *Gaußs* Breitenunterschied etc. S. 71 genommen.

7. Dänische Gradmessung.

Laueburg.....	58° 22' 17" 046		
Lysabell.....	54 54 10,352	1° 31' 53" 906	87436,538

Diese Resultate sind mir von Herrn Etatsrath *Schumacher* mitgetheilt. Sie würden sich mit denen der vorigen Gradmessung verbinden lassen, wenn die Polhöhenbestimmungen beider Gradmessungen nicht auf verschiedenen Sternen beruheten, wodurch ihre Verbindung von den Bestimmungen der Declinationen dieser Sterne abhängig werden würde. Die Gefahr, Unternehmungen von so ausgezeichneter Genauigkeit, wie diese beiden, durch die Einmischung eines fremden Elementes zu entstellen, glaube ich vermeiden zu müssen, desto mehr, da das 9860',46 südlich von Altona liegende Laueburg auch 21031',51 östlich liegt, also in einem Winkel mit dem Meridiane von fast 65° erscheint, und daher die Entfernung seines Parallels von dem Parallel von Altona nicht mit derselben Sicherheit gefunden werden kann, welche, bei geringeren Neigungen gegen den Meridian, erreichbar ist.

8. Preussische Gradmessung.

Trunz.....	54° 13' 11" 466	0° 29' 39" 034	28211,629
Königsberg.....	54 42 50,500	1 30 28,990	86176,975

Ein besonderes Werk über diese Gradmessung ist jetzt unter der Presse.

9. Russische Gradmessung.

Belin.....	52° 2' 40" 864		
Nemesch.....	54 39 4,519	2° 36' 23" 655	148811,418
Jacobstadt.....	56 30 4,562	4 27 23,698	254543,454
Brisen.....	56 34 34,550	4 32 10,686	259110,685
Dorpat.....	58 22 47,280	6 20 6,416	361824,461
Hochland.....	60 5 9,771	8 2 28,907	459363,008

Diese Zahlen hat mir Herr General von *Tenner* mitgetheilt. Die sich auf die *Struvesche* Gradmessung beziehenden für Jacobstadt, Dorpat und Hochland stimmen mit denen überein, welche sich in dem Werke über die Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands I. S. 312 u. 338 angegeben finden.

10. Schwedische Gradmessung.

Malin.....	65° 31' 30" 265		
Pahtsivara.....	67 8 49,850	1° 37' 19" 565	92777,981

Dieses sind die Angaben von *Svanberg*, p. 157 seines Werkes. Herr *Schmidt* hat die Amplitude 0° 785 größer, die Entfernung

der Parallelen 175,261 kleiner angenommen. Diese Unterschiede sind aus zwei Anmerkungen hervorgegangen, welche Herr *Svanberg* zu seiner Reduction der Beobachtungen macht. Die eine derselben giebt an, wie die Polhöhen ausgefallen seyn würden, wenn man die Dichtigkeit der Luft, und damit die Strahlenbrechung, nicht auf die gewöhnliche Art von den Thermometerständen abhängig, sondern in einem zusammengesetzteren Verhältnisse zu denselben, hätte annehmen wollen, welches gewisse Versuche von *Prony* anzudeuten schienen. Die andere zeigt, welche Entfernung man aus der Messung berechnet haben würde, wenn man von der Annahme ausgegangen wäre, das von Paris gesandte Doppelmeter habe seine wahre Länge bei der Normaltemperatur der Toise = 13° R. Da die Zweifel, durch welche diese beiden Anmerkungen veranlaßt worden sind, als völlig beseitigt angesehen werden können, so hätte Herr *Schmidt* keine Rücksicht darauf nehmen sollen.

2.

Die Theorie, mit welcher die angeführten 10 Gradmessungen verglichen werden sollen, ist folgende. Wenn die beiden halben Axen eines elliptischen Rotationsphäroids durch a und b bezeichnet werden, und wenn

$$\frac{a-b}{a+b} = n$$

gesetzt wird, so ist die Länge des Bogens des Meridians zwischen dem Aequator und der Polhöhe ϕ , das Integral:

$$s = a(1-ee) \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-ee \sin^2 \phi)}}$$

oder die Entwicklung desselben:

$$s = a(1-n)^2(1+n)N \left\{ \phi - x \sin 2\phi + \frac{1}{2} x^2 \sin 4\phi - \frac{1}{4} x^4 \sin 6\phi + \dots \right\}$$

worin

$$N = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\right)^2 n^4 + \dots$$

$$N_x = \frac{3}{2} n + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} n^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^5 + \dots$$

$$N_x^2 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} n^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^4 + \dots$$

$$N_x^4 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} n^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} n^5 + \dots$$

n. s. w.

gesetzt worden sind. Will man diesen Ausdruck, statt von der halben großen Axe, von der Länge des mittleren Meridiangrades (g) abhängig machen, so hat man $\phi = 180^\circ$ zu setzen, wodurch man

$$180 g = a(1-n)^2(1+n)N_x,$$

also

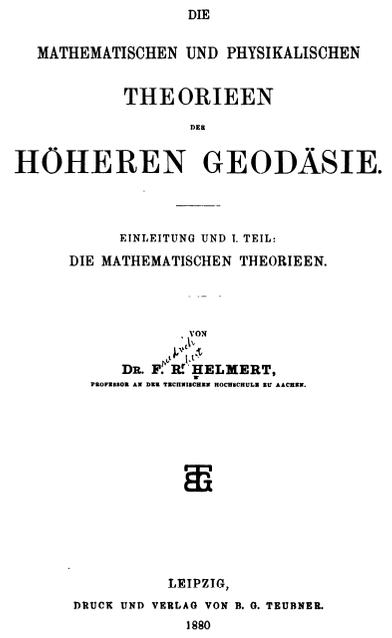
$$s = \frac{180 g}{\pi} \left\{ \phi - x \sin 2\phi + \frac{1}{2} x^2 \sin 4\phi - \frac{1}{4} x^4 \sin 6\phi + \dots \right\}$$

erhält.

25*

子午線弧長の計算式の変遷 (5)

• Helmert (1880) の該当箇所



46 1. Kapitel. Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

trigonometrischen Funktionen besonders eingebunden sind, kein weiteres Aufschreiben nötig, als für den resultierenden Wert der Glieder der Reihe selbst.

§ 6. Rektifikation des Meridianbogens. Dieselbe läßt sich mittelst der Formel $dM = \rho_n dB$ bewirken, wenn ρ_n als Funktion von B dargestellt ist. Die Integration ist ohne Reihenentwicklung nicht möglich. Um integrieren zu können, müssen in der Reihe (3) S. 44 die Sinuspotenzen in trigonometrische Funktionen der Vielfachen von B verwandelt werden. Die stärkste Konvergenz der hierbei auftretenden Koeffizientenreihen giebt die Anwendung von n . Mit Rücksicht auf (2) S. 45 folgt in diesem Falle, wenn im Ausdrucke für ρ_n für $1 - e^2$ gesetzt wird $(1 - n)^2 : (1 + n)^2$, ohne Schwierigkeit:

$$dM = a_0 (1 - n) (1 - n^2) \left\{ (1 + n e^{2iB}) (1 + n e^{-2iB}) \right\}^{-\frac{1}{2}} dB. \quad (1)$$

Nun ist

$$(1 + n e^{2iB})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} n e^{2iB} + \frac{15}{8} n^2 e^{4iB} - \frac{35}{16} n^3 e^{6iB} + \frac{315}{128} n^4 e^{8iB} - \dots \quad (2)$$

Multipliziert man die beiden hierin enthaltenen Reihen und führt statt des Imaginären die Cosinus ein, so folgt:

$$dM = a_0 (A_0 - A_2 \cos 2B + 2A_4 \cos 4B - 3A_6 \cos 6B + 4A_8 \cos 8B - \dots) dB \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= (1 - n) (1 - n^2) \left\{ 1 + \frac{9}{4} n^2 + \frac{225}{64} n^4 + \dots \right\} \\ A_2 &= (1 - n) (1 - n^2) \left\{ 3n + \frac{45}{8} n^3 + \dots \right\} \\ A_4 &= (1 - n) (1 - n^2) \left\{ \frac{15}{8} n^2 + \frac{105}{32} n^4 + \dots \right\} \\ A_6 &= (1 - n) (1 - n^2) \left\{ \frac{35}{24} n^3 + \dots \right\} \\ A_8 &= (1 - n) (1 - n^2) \left\{ \frac{315}{256} n^4 + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Integration giebt nunmehr für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B :

$$M = a_0 (A_0 B - \frac{1}{2} A_2 \sin 2B + \frac{1}{4} A_4 \sin 4B - \frac{1}{6} A_6 \sin 6B + \frac{1}{8} A_8 \sin 8B - \dots). \quad (5)$$

Subtrahiert man die Ausdrücke für 2 Werte B_1 und B_2 und setzt

$$B_2 - B_1 = \Delta B \quad \frac{1}{2} (B_2 + B_1) = B, \quad (6)$$

so ergibt sich für den Meridianbogen ΔM von B_1 bis B_2 , $B_2 > B_1$, unter Anwendung der Relation $\sin \lambda B_2 - \sin \lambda B_1 = 2 \cos \lambda B \sin \frac{\lambda}{2} \Delta B$:

§ 7. Die Koeffizienten A .

$$dM = a_0 \left\{ A_0 \Delta B - A_2 \cos 2B \sin \Delta B + A_4 \cos 4B \sin 2 \Delta B - A_6 \cos 6B \sin 3 \Delta B + A_8 \cos 8B \sin 4 \Delta B - \dots \right\} \quad (7)$$

Hierin sind B und ΔB als Arcus zu verstehen. Ist ΔB in Sekunden gegeben, so hat man zur Berechnung des Arcus:

$$\Delta B = \frac{1}{q^2} (\Delta B \text{ in } \text{inh.}) \quad (8)$$

Die Konvergenz der vorstehenden Reihen erhellt daraus, daß die (2) wegen $n < 1$ absolut konvergent sind, ebenso ihr Produkt. Die Integration verstärkt die Konvergenz wegen auftretender Divisoren.

§ 7. Die Koeffizienten A . Die Konvergenz der Reihen für die A wächst, wenn man sie mit $(1 - n^2)^2$ ausmultipliziert. Es folgt damit:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{1+n} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots \right) \\ A_2 &= \frac{3}{1+n} \left(n - \frac{1}{8} n^3 - \dots \right) \\ A_4 &= \frac{15}{8(1+n)} \left(n^2 - \frac{1}{4} n^4 - \dots \right) \\ A_6 &= \frac{35}{24(1+n)} (n^3 - \dots) \\ A_8 &= \frac{315}{256(1+n)} (n^4 - \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dagegen geben Entwicklungen für M mit e^2 oder m Folgendes:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{206} e^6 - \frac{175}{10384} e^8 - \dots \\ A_2 &= \frac{3}{4} \left(e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{15}{128} e^6 + \frac{25}{512} e^8 + \dots \right) \\ A_4 &= \frac{15}{128} \left(e^4 + \frac{3}{4} e^6 + \frac{35}{64} e^8 + \dots \right) \\ A_6 &= \frac{35}{1024} \left(e^6 + \frac{5}{4} e^8 + \dots \right) \\ A_8 &= \frac{315}{65536} (e^8 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(1 - \frac{1}{16} m^2 - \frac{15}{1024} m^4 - \dots \right) : \sqrt{1+m} \\ A_2 &= \frac{3}{4} \left(m + \frac{3}{32} m^3 + \dots \right) : \sqrt{1+m} \\ A_4 &= \frac{15}{96} \left(m^2 + \frac{5}{16} m^4 + \dots \right) : \sqrt{1+m} \\ A_6 &= \frac{35}{192} (m^3 + \dots) : \sqrt{1+m} \\ A_8 &= \frac{315}{4096} (m^4 + \dots) : \sqrt{1+m} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1. Kapitel. Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

Am ungünstigsten sind die (2); auch die (3) sind weniger gut als die (1), wie mit Rücksicht auf die Beziehung m gleich nahezu $2n$, leicht zu ersehen ist.

Die Rotirichtung mittelst e^2 giebt bereits Delambre in seinen *Méthode analytique* (1799) bis e^4 . Formeln mit m gab Poisson, *Traité de Géodésie*, Band 1 und neuerdings P. Fischer in seinen *Untersuchungen*; Bessel benutzte n (*Abhandlungen* Band 8, S. 44) 1887. Die Einführung von n oder von Sinuspotenzen gewährt keine Vorteile, wie Verf. sich überzeugt hat.

§ 8. Einführung der mittleren Länge G eines Meridiangrades. Für den Meridianquadranten wird nach (5) S. 46, indem $B = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist:

$$\text{Mer. Quadr.} = \frac{\pi}{2} a_0 A_0. \quad (1)$$

Setzt man ihn dreierlei gleich $90 G$, so hat man sofort für G die Formel:

$$G = \frac{1}{e^2} a_0 A_0 = \frac{1 + \frac{1}{4} n^2 + \dots}{1 + n} \frac{a_0}{e^2}. \quad (2)$$

Für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B folgt hiermit:

$$\left. \begin{aligned} M = G \{ B \text{ in Grad.} \\ &= \frac{5}{2} e^2 \left(n - \frac{3}{8} n^3 \right) \sin 2B \\ &+ \frac{15}{16} e^4 \left(n^2 - \frac{1}{2} n^4 \right) \sin 4B \\ &- \frac{35}{256} e^6 n^3 \sin 6B \\ &+ \frac{315}{512} e^8 n^4 \sin 8B + \dots \} \\ M = [5,0457946544] B \text{ in Grad.} \\ &+ [4,2038114754n] \sin 2B \\ &+ [1,2234947] \sin 4B \\ &+ [3,888n - 10] \sin 6B \\ &+ [5,69 - 10] \sin 8B + \dots \\ M = 111120,6196090 B \text{ in Grad.} \\ &- 15988,63821 \sin 2B \\ &+ 16,72995 \sin 4B \\ &- 0,02178 \sin 6B \\ &+ 0,00003 \sin 8B + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dagegen ist für den Meridianbogen ΔM von B_1 bis B_2 :

子午線弧長の計算式(従来我が国が採用)

- 赤道から緯度 φ に至る子午線弧長 $B(\varphi)$: e^2 についての展開式

$$\begin{aligned}
 B(\varphi) &= \int_0^\varphi M_\theta d\theta = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta = a(1-e^2) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-3/2}{j} (-e^2)^j \int_0^\varphi \sin^{2j} \theta d\theta \\
 &= a(1-e^2) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-3/2}{j} \left(-\frac{e^2}{4}\right)^j \int_0^\varphi \left\{ \binom{2j}{j} + 2 \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} \binom{2j}{k} \cos 2(j-k)\theta \right\} d\theta \\
 &\approx a(1-e^2) \left\{ \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} + \frac{19324305}{29360128}e^{14} + \frac{4927697775}{7516192768}e^{16}\right) \varphi \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \frac{297297}{262144}e^{12} + \frac{135270135}{117440512}e^{14} + \frac{547521975}{469762048}e^{16} \right) \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \frac{1486485}{2097152}e^{12} + \frac{45090045}{58720256}e^{14} + \frac{766530765}{939524096}e^{16} \right) \sin 4\varphi \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \frac{165165}{524288}e^{12} + \frac{45090045}{117440512}e^{14} + \frac{209053845}{469762048}e^{16} \right) \sin 6\varphi + \frac{1}{8} \left(\frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \frac{99099}{1048576}e^{12} + \frac{4099095}{29360128}e^{14} + \frac{348423075}{1879048192}e^{16} \right) \sin 8\varphi \\
 &\quad - \frac{1}{10} \left(\frac{693}{131072}e^{10} + \frac{9009}{524288}e^{12} + \frac{4099095}{117440512}e^{14} + \frac{26801775}{469762048}e^{16} \right) \sin 10\varphi + \frac{1}{12} \left(\frac{3003}{2097152}e^{12} + \frac{315315}{58720256}e^{14} + \frac{11486475}{939524096}e^{16} \right) \sin 12\varphi \\
 &\quad \left. - \frac{1}{14} \left(\frac{45045}{117440512}e^{14} + \frac{765765}{469762048}e^{16} \right) \sin 14\varphi + \frac{1}{16} \left(\frac{765765}{7516192768}e^{16} \right) \sin 16\varphi \right\}
 \end{aligned}$$

上式で $j = 8$ までとった近似式(精密測地網一次基準点測量にて使用)。あまりの桁数にかつて転記ミスも発生

子午線弧長の改良計算式 (1)

- 赤道から緯度 φ に至る子午線弧長 $B(\varphi)$: 子午線曲率半径(部分)の変形

$$\begin{aligned}
 1 - e^2 &= \underbrace{\{(1 - e^2 \sin^2 \theta) - e^2 \cos^2 \theta\}}_{1 - e^2} \underbrace{\{(1 - e^2 \sin^2 \theta) + e^2 \sin^2 \theta\}}_1 \\
 &= (1 - e^2 \sin^2 \theta)^2 - e^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (1 - e^2 \sin^2 \theta) - e^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= (1 - e^2 \sin^2 \theta)^2 - e^2 \cos 2\varphi (1 - e^2 \sin^2 \theta) - \{(e^2 \sin 2\varphi)/2\}^2 \\
 \therefore \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} - \frac{e^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} - \frac{\{(e^2 \sin 2\varphi)/2\}^2}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\
 &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \right) = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + \frac{d^2}{d\theta^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \\
 \therefore \int_0^\varphi \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta &= \left(1 + \frac{d^2}{d\varphi^2} \right) \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta \Rightarrow n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a - b}{a + b} = \frac{f}{2 - f} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \cong \frac{e^2}{4} \text{ で置換}
 \end{aligned}$$

子午線弧長の改良計算式 (2)

- 赤道から緯度 φ に至る子午線弧長 $B(\varphi)$: 第三扁率 n についての展開式

$$\begin{aligned}
 B(\varphi) &= \left(1 + \frac{d^2}{d\varphi^2}\right) \frac{a}{1+n} \int_0^\varphi \underbrace{\sqrt{1 + 2n \cos 2\theta + n^2}}_{\text{右多項式の母関数}} d\theta = \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{d^2}{d\varphi^2}\right) \int_0^\varphi \sum_{j=0}^{\infty} (-n)^j \underbrace{C_j^{(-1/2)}(\cos 2\theta)}_{\text{Gegenbauer多項式}} d\theta \\
 &= \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{d^2}{d\varphi^2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-n)^j \sum_{k=0}^j \binom{j-k-3/2}{j-k} \binom{k-3/2}{k} \int_0^\varphi \cos 2(j-2k)\theta d\theta \\
 &= \frac{a}{1+n} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n\right) \right\}^2 \left[\varphi + \sum_{l=1}^{2j} \left(\frac{1}{l} - 4l\right) \sin 2l\varphi \prod_{m=1}^l \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{j + (-1)^m \lfloor m/2 \rfloor} - n \right\}^{(-1)^m} \right] \quad (\ast) \\
 &\approx \frac{a}{1+n} \left\{ \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256}\right) \varphi - \frac{3}{2} \left(n - \frac{n^3}{8} - \frac{n^5}{64}\right) \sin 2\varphi + \frac{15}{16} \left(n^2 - \frac{n^4}{4} - \frac{5}{128} n^6\right) \sin 4\varphi - \frac{35}{48} \left(n^3 - \frac{5}{16} n^5\right) \sin 6\varphi + \frac{315}{512} \left(n^4 - \frac{7}{20} n^6\right) \sin 8\varphi - \frac{693}{1280} n^5 \sin 10\varphi + \frac{1001}{2048} n^6 \sin 12\varphi \right\}
 \end{aligned}$$

(※)式で $j = 3$ まで採った近似式。簡潔でありながら、先に示した e^2 による展開近似式に相当する精度を有する。

Helmert (1880) にて示された結果は、赤字を除いた (※)式で $j = 2$ まで採った近似式

前頁計算式を用いたプログラム例(html内のJavaScript)

```

<html><head><title>緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求めるページ</title>
<script><!--
a=6378.137 ; rf=298.257222101
n=0.5/(rf-0.5) ; n15=1.5*n ; anh=0.5*a/(1.0+n) ; rho2=Math.PI/90.0 ; s=[0.0] ; t=[] ; e=[]
jt=eval(prompt("繰り返し数を入力してください。通常は3か4ぐらいで十分過ぎるほどの精度が出ます。")); jt2=jt<<1
document.write("<h2>繰り返し数: " + jt)
ep=1.0 ; for(k=1; k<=jt; k++) { ep*=e[k]=n15/k-n ; e[k+jt]=n15/(k+jt)-n }
for(deg=0; deg<=90; deg+=5) {
    phi2=deg*rho2 ; dc=2.0*Math.cos(phi2) ; s[1]=Math.sin(phi2)
    for(i=1; i<=jt2; i++) { s[i+1]=dc*s[i]-s[i-1] ; t[i]=(1.0/i-4.0*i)*s[i] }
    sum=0.0 ; c1=ep ; j=jt
    while(j) {
        c2=phi2 ; c3=2.0 ; l=j ; m=0
        while(1) { c2+=(c3/=e[l--])*t[++m]+(c3*=e[2*j-1])*t[++m] }
        sum+=c1*c1*c2 ; c1/=e[j--]
    }
    document.write("<br/>" + deg + " , " + anh*(sum+phi2))
}
document.write("</h2>")
// --></script>
</head><body /></html>

```

```

繰り返し数 : 4
0 , 0
5 , 552.8854510401946
10 , 1105.8548331984493
15 , 1658.9895893476691
20 , 2212.366254102981
25 , 2766.054169063111
30 , 3320.113397845021
35 , 3874.5929015891793
40 , 4429.529030236588
45 , 4984.944377857996
50 , 5540.847041560969
55 , 6097.230312999932
60 , 6654.072819367444
65 , 7211.339117188209
70 , 7768.980727655517
75 , 8326.937587172346
80 , 8885.139871836758
85 , 9443.510140574848
90 , 10001.965729230461

```

- IUGG/IAG第17回総会(1979年@キャンベラ)にて決議採択
- 形状及び大きさを次の4基本定数(Stokes定数)により定義
 - 赤道半径 a (ジオイド上のジオポテンシャル W_0)
 - 大気を包含した地心引力定数 GM
 - 力学的形状係数 J_2 (重力ポテンシャルを帯球調和関数展開した際の2次の係数)
 - 自転角速度 ω
- 扁平率は、上記基本定数から間接的に導出される

- Euler, L. (1755): Éléments de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres: Année 1753*, 258–293.
- Delambre, J. B. J. (1799): *Méthodes Analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien*; précédées d'un mémoire sur le même sujet par A. M. Legendre, De L'Imprimerie de Crapelet, Paris, 72–73.
- Bessel, F. W. (1837): Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, *Astronomische Nachrichten*, **14**, 333–346.
- Helmert, F. R. (1880): *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*, Einleitung und 1 Teil, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 46–48.

- 陸地測量部編 (1917): 一等三角測量實行法, 下卷(觀測計算), 第四編第二章.
- 国土地理院編 (1988): 精密測地網一次基準点測量作業規程, 55–56.
- 中川一郎 (1994): 測地基準系, 『現代測地学』, 日本測地学会, A-1.
- 河瀬和重 (2009): 緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般的な計算式, 国土地理院時報, **119**, 45–55.
- 河瀬和重 (2011): Gauss-Krüger投影における経緯度座標及び平面直角座標相互間の座標換算についてのより簡明な計算方法, 国土地理院時報, **121**, 109–124.